

文章编号:1005-3085(2010)05-0827-06

求线性矩阵方程双对称最小二乘解的变形共轭梯度法*

田小红, 张凯院

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

摘 要: 本文基于求线性代数方程组的共轭梯度法的思想, 通过特殊的变形与近似处理, 建立了求一般线性矩阵方程的双对称最小二乘解的迭代算法, 并证明了迭代算法的收敛性。不考虑舍入误差时, 迭代算法能够在有限步计算之后得到矩阵方程的双对称最小二乘解; 选取特殊的初始矩阵时, 还能够求得矩阵方程的极小范数双对称最小二乘解。同时, 也能够给出指定矩阵的最佳逼近双对称矩阵。算例表明, 迭代算法是有效的。

关键词: 双对称矩阵; 最小二乘解; 极小范数解; 迭代算法; 最佳逼近

分类号: AMS(2000) 15A24; 65F10

中图分类号: O241.6

文献标识码: A

1 引言

矩阵方程特殊解的计算问题在电学、结构动力学、振动理论、自动控制理论等领域都有重要应用。文献[1-6]建立了求矩阵方程 $AXB = C$ 或者 $AXB + CXD = F$ 某些特殊解的迭代方法。本文建立求一般线性矩阵方程双对称最小二乘解的变形共轭梯度法(MCG算法)。

$\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 实矩阵集合, $SR^{n \times n}$ 表示 n 阶实对称矩阵集合, $A \otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积, 定义实矩阵 A 与 B 的内积为 $[A, B] = \text{trace}(A^T B)$, 由此导出矩阵的 Frobenius 范数 $\|A\| = \sqrt{[A, A]}$, $\text{vec}(A)$ 表示将矩阵 A 按行拉直构成的列向量, e_i 表示单位矩阵 I_n 的第 i 列。记 $S = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$, 则有 $S^2 = I_n$, $S^T = S$ 。

定义 1 若矩阵 $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的元素满足

$$x_{ij} = x_{ji} = x_{n+1-j, n+1-i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

则称 X 为双对称矩阵。全体 n 阶双对称矩阵的集合记为 $BSR^{n \times n}$ 。

对于一般的线性矩阵方程

$$A_1 X B_1 + \dots + A_N X B_N = C,$$

研究下面两个问题:

问题 1 设 $A_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B_i \in \mathbf{R}^{n \times p}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $C \in \mathbf{R}^{m \times p}$, 求 $X \in BSR^{n \times n}$ 使得

$$\left\| \sum_{i=1}^N A_i X B_i - C \right\| = \min. \quad (1)$$

问题 2 给定 $\bar{X} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, S_E 表示问题 1 的解集合, 求 $\hat{X} \in S_E$ 使得

$$\|\hat{X} - \bar{X}\| = \min_{X \in S_E} \|X - \bar{X}\|. \quad (2)$$

收稿日期: 2008-11-10. 作者简介: 田小红(1984年4月生), 女, 硕士. 研究方向: 计算数学.

*基金项目: 陕西省自然科学基金(2006A05).

2 问题1的等价转化

引理1 矩阵 $X \in BSR^{n \times n}$ 的充要条件是 $X = X^T = SXS$ 。

引理2 若矩阵 $X \in SR^{n \times n}$, 则 $X + SXS \in BSR^{n \times n}$ 。

为了讨论方便引进记号

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A_i^T A_j X B_j B_i^T + B_i B_j^T X A_j^T A_i \\ &\quad + S A_i^T A_j S X S B_j B_i^T S + S B_i B_j^T S X S A_j^T A_i S), \\ Q &= \sum_{i=1}^N (A_i^T C B_i^T + B_i C^T A_i + S A_i^T C B_i^T S + S B_i C^T A_i S). \end{aligned}$$

定理1 求解问题1等价于求矩阵方程

$$f(X) = Q \quad (3)$$

的双对称解, 而且该矩阵方程一定有双对称解。

证明 当 $X \in BSR^{n \times n}$ 时, 由引理1知 $X = X^T = SXS$ 。因此, 求 $X \in BSR^{n \times n}$ 使得(1)成立, 等价于求 $X \in BSR^{n \times n}$ 使得

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^N A_i X B_i - C \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^N B_i^T X A_i^T - C^T \right\|^2 \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^N A_i S X S B_i - C \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^N B_i^T S X S A_i^T - C^T \right\|^2 = \min. \end{aligned} \quad (4)$$

下面证明求极小值问题(4)的双对称解等价于求矩阵方程(3)的双对称解。将矩阵方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N A_i X B_i = C, & \sum_{i=1}^N B_i^T X A_i^T = C^T, \\ \sum_{i=1}^N A_i S X S B_i = C, & \sum_{i=1}^N B_i^T S X S A_i^T = C^T, \end{cases} \quad (5)$$

按行拉直可得线性方程组

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N A_i \otimes B_i^T \\ \sum_{i=1}^N B_i^T \otimes A_i \\ \sum_{i=1}^N (A_i S) \otimes (B_i^T S) \\ \sum_{i=1}^N (B_i^T S) \otimes (A_i S) \end{pmatrix} \cdot \overline{\text{vec}}(X) = \begin{pmatrix} \overline{\text{vec}}(C) \\ \overline{\text{vec}}(C^T) \\ \overline{\text{vec}}(C) \\ \overline{\text{vec}}(C^T) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

易见, 求线性方程组 (6) 的最小二乘解, 等价于求矩阵方程组 (5) 的最小二乘解, 也就是求极小值问题 (4) 的解. 记线性方程组 (6) 的系数矩阵为 V , 那么

$$V^T = \left(\sum_{i=1}^N A_i^T \otimes B_i, \sum_{i=1}^N B_i \otimes A_i^T, \sum_{i=1}^N (SA_i^T) \otimes (SB_i), \sum_{i=1}^N (SB_i) \otimes (SA_i^T) \right).$$

引进记号

$$W = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left((A_i^T A_j) \otimes (B_i B_j^T) + (B_i B_j^T) \otimes (A_i^T A_j) \right. \\ \left. + (SA_i^T A_j S) \otimes (SB_i B_j^T S) + (SB_i B_j^T S) \otimes (SA_i^T A_j S) \right),$$

线性方程组 (6) 的正规方程组可写为

$$W \cdot \overline{\text{vec}}(X) = V^T \left((\overline{\text{vec}}(C))^T, (\overline{\text{vec}}(C^T))^T, (\overline{\text{vec}}(C))^T, (\overline{\text{vec}}(C^T))^T \right)^T, \quad (7)$$

将正规方程组 (7) 还原为矩阵方程就是矩阵方程 (3).

下面证明矩阵方程 (3) 有双对称解. 因为矩阵方程 (3) 有解, 所以可设 \tilde{X} 是它的一个解 (未必是双对称解), 那么

$$f(\tilde{X}) = Q, \quad (8)$$

令

$$g(\tilde{X}) = \frac{1}{4} \times (\tilde{X} + \tilde{X}^T + S(\tilde{X} + \tilde{X}^T)S),$$

由引理 2 知 $g(\tilde{X}) \in BSR^{n \times n}$, 式 (8) 取转置, 然后分别左、右乘 S , 联立运算可得 $f(g(\tilde{X})) = Q$, 这表明 $g(\tilde{X})$ 是矩阵方程 (3) 的一个双对称解.

3 求解问题 1 的变形共轭梯度法

下面建立求矩阵方程 (3) 双对称解的 MCG 算法, 也就是求解问题 1 的 MCG 算法.

步骤 1 给定矩阵 $A_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B_i \in \mathbf{R}^{n \times p}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $C \in \mathbf{R}^{m \times p}$, $X_0 \in BSR^{n \times n}$;

步骤 2 计算 $R_0 = Q - f(X_0)$, $G_0 = f(R_0)$, $P_0 = G_0$, 输值 $k := 0$;

步骤 3 如果 $R_k = 0$, 停止; 否则, 置 $k := k + 1$;

步骤 4 计算

$$X_k = X_{k-1} + \frac{\|R_{k-1}\|^2}{\|P_{k-1}\|^2} P_{k-1}, \\ R_k = Q - f(X_k) = R_{k-1} - \frac{\|R_{k-1}\|^2}{\|P_{k-1}\|^2} f(P_{k-1}), \\ G_k = f(R_k), \quad P_k = G_k - \frac{[G_k, P_{k-1}]}{\|P_{k-1}\|^2} P_{k-1}, \quad (\text{变形之一})$$

步骤 5 返回步骤 3.

引理 3 矩阵 $X, Y \in \mathbf{R}^{p \times p}$, 则有 $[f(X), Y] = [X, f(Y)]$.

定理 2 如果 X^* 是矩阵方程 (3) 的双对称解, 那么对任意初始双对称矩阵 X_0 , MCG 算法中的矩阵 X_i , R_i 和 G_i 满足 $[G_i, X^* - X_i] = \|R_i\|^2$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

证明 因为 X^* 是矩阵方程 (3) 的双对称解, 所以 $f(X^*) = Q$, 当 $i = 0, 1, 2, \dots$ 时, 有

$$\begin{aligned} [G_i, X^* - X_i] &= [f(R_i), X^* - X_i] = [R_i, f(X^* - X_i)] \\ &= [R_i, f(X^*) - f(X_i)] = [R_i, Q - f(X_i)] = [R_i, R_i] = \|R_i\|^2. \end{aligned}$$

定理 3 如果 X^* 是矩阵方程 (3) 的双对称解, 那么对任意初始双对称矩阵 X_0 , MCG 算法中 X_i, R_i 和 P_i 满足 $[P_i, X^* - X_i] = \|R_i\|^2 (i = 0, 1, 2, \dots)$.

利用定理 2 采用数学归纳法即可证得结论。

推论 1 对 MCG 算法中的矩阵 R_i 和 P_i , 若 $R_i \neq 0$, 则 $P_i \neq 0 (i = 0, 1, 2, \dots)$.

定理 4 对 MCG 算法中的矩阵 R_i 和 P_i , 若有正数 k , 使得 $R_i \neq 0 (i = 0, 1, \dots, k)$, 则 $[R_i, R_j] = 0, [P_i, P_j] = 0 (i \neq j; i, j = 0, 1, \dots, k)$.

证明 根据矩阵内积运算的交换律, 只需对 $0 \leq i < j \leq k$ 证明结论成立即可。

步骤 1 采用数学归纳法证明 $[R_i, R_{i+1}] = 0, [P_i, P_{i+1}] = 0 (i = 0, 1, \dots, k)$;

步骤 2 假设当 $0 \leq i \leq k, 1 < l < k$ 时, $[R_i, R_{i+l}] = 0, [P_i, P_{i+l}] = 0$ 成立, 证明 $[R_i, R_{i+l+1}] = 0, [P_i, P_{i+l+1}] = 0$. 详细过程略。

定理 5 对任意初始双对称矩阵 X_0 , 矩阵方程 (3) 的双对称解可在有限步计算后得到。

这是因为在有限维矩阵空间 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 中, R_0, R_1, R_2, \dots 两两正交, 所以必定存在正整数 $k \leq n^2$, 使得 $R_k = 0$. 由于实际计算过程中不可避免的舍入误差影响, MCG 算法并不能在有限步迭代计算后得到问题 1 的精确解, 所以只能把它作为迭代算法使用。

引理 4^[7] 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}, b \in \mathbf{R}^m$, 线性方程组 $Ax = b$ 有解, 则极小范数解 x^* 唯一, 且 $x^* = A^+b \in R(A^T)$, 而在 $R(A^T)$ 中只有 $Ax = b$ 的一个解。这里 A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 逆。

定理 6 矩阵方程 (3) 总是有双对称解的, 若选取初始双对称矩阵

$$X_0 = f(H), \quad H \in BSR^{n \times n}, \quad (9)$$

则 MCG 算法可在有限步计算后得到矩阵方程 (3) 的极小范数双对称解。

证明 将矩阵方程 (3) 按行拉直可得线性方程组

$$W \cdot \overline{vec}(X) = \overline{vec}(Q), \quad (10)$$

按照式 (9) 选取初始双对称矩阵 X_0 时, 由 MCG 算法得到的矩阵 X_k 具有类似于 X_0 的表示形式 (对应的 H 不同), 即有 $Y_k \in BSR^{n \times n}$, 使得 $X_k = f(Y_k)$. 易见

$$\overline{vec}(X_k) = W \cdot \overline{vec}(Y_k) \in R(W) = R(W^T),$$

由定理 5 知, 存在 k_0 使得矩阵方程 (3) 的双对称解 $X^* = X_{k_0}$, 从而 $\overline{vec}(X^*)$ 是线性方程组 (10) 的解。由 $\overline{vec}(X^*) = \overline{vec}(X_{k_0}) \in R(W^T)$ 及引理 4 可得 $\overline{vec}(X^*) = W^+ \cdot \overline{vec}(Q)$ 是线性方程组 (10) 的极小范数解, 从而 X^* 是矩阵方程 (3) 的极小范数双对称解。

4 问题 2 的等价转化

对任意给定的矩阵 $\bar{X} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 问题 1 的解集合 S_E 非空, 若 $X \in S_E \subset BSR^{n \times n}$, 根据对称矩阵与反对称矩阵的正交性, 以及双对称矩阵 ($Y = Y^T = SY S$) 与对称次反对称矩

阵($Y = Y^T = -SY S$)的正交性, 可得

$$\begin{aligned} & \|X - \bar{X}\|^2 \\ &= \left\| X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{\bar{X} - \bar{X}^T}{2} \right\|^2 \\ &= \left\| \left(X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} \right) - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T - S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} \right\|^2 + \left\| \frac{\bar{X} - \bar{X}^T}{2} \right\|^2 \\ &= \left\| \left(X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} \right) \right\|^2 + \left\| \frac{\bar{X} + \bar{X}^T - S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} \right\|^2 + \left\| \frac{\bar{X} - \bar{X}^T}{2} \right\|^2, \end{aligned}$$

于是, 问题2中求 $\hat{X} \in S_E$ 使

$$\|\hat{X} - \bar{X}\| = \min_{X \in S_E} \|X - \bar{X}\|,$$

等价于求 $\hat{X} \in S_E$ 使

$$\left\| \hat{X} - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} \right\| = \min_{X \in S_E} \left\| X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} \right\|, \quad (11)$$

令

$$\tilde{X} = X - \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}, \quad \tilde{C} = C - \sum_{i=1}^N A_i \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4} B_i,$$

当 $X \in S_E$ 时, 矩阵方程(3)可写为

$$f(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^N (A_i^T \tilde{C} B_i^T + B_i \tilde{C}^T A_i + S A_i^T \tilde{C} B_i^T S + S B_i \tilde{C}^T A_i S), \quad (12)$$

矩阵方程(12)与矩阵方程(3)的差别只是左端矩阵不同。根据式(11), 求解问题2等价于求矩阵方程(12)的极小范数双对称解 \tilde{X} 。取初始矩阵 $\tilde{X}_0 = f(H)$, 其中 H 为 $BSR^{n \times n}$ 中任意矩阵, 使用MCG算法可求得矩阵方程(12)的唯一极小范数双对称解 \tilde{X}^* , 从而得到问题2的解

$$\hat{X} = \tilde{X}^* + \frac{\bar{X} + \bar{X}^T + S(\bar{X} + \bar{X}^T)S}{4}.$$

算例结果表明该MCG算法是有效的。

参考文献:

- [1] Chu K W E. Symmetric solution of linear matrix equations matrix decompositions[J]. Linear Algebra Appl, 1989, 119: 35-50
- [2] Dai H. On the symmetric solutions of linear equations[J]. Linear Algebra Appl, 1990, 131: 1-7
- [3] 彭振赞. 线性矩阵方程 $AXB = C$ 的中心对称解及其最佳逼近[J]. 工程数学学报, 2003, 20(6): 15-20
Peng Z Y. The central symmetric solution of the linear matrix equation $AXB = C$ and its optimal approximation[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2003, 20(6): 15-20
- [4] 尚丽娜, 张凯院, 陈梅枝. 求矩阵方程 $AXB = C$ 的双对称最小二乘解的迭代算法[J]. 数值计算与计算机应用, 2008, 29(2): 126-135
Shang L N, Zhang K Y, Chen M Z. An iterative method for the least squares symmetric solution of the matrix equation $AXB = C$ [J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2008, 29(2): 126-135

- [5] 陈梅枝, 张凯院, 尚丽娜. 求矩阵方程 $AXB = C$ 的中心对称最小二乘解及其最佳逼近的迭代算法[J]. 工程数学学报, 2008, 25(6): 1125-1128
Chen M Z, Zhang K Y, Shang L N. An iterative method for the least squares central symmetric solution of the matrix equation $AXB = C$ and its optimal approximation[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(6): 1125-1128
- [6] Hou J J, Peng Z Y, Zhang X L. An iterative method for the least squares symmetric solution of matrix equation $AXB = C$ [J]. Numer Algor, 2006, 42: 181-192
- [7] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论(第3版)[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006
Cheng Y P, Zhang K Y, Xu Z. Matrix Theory (the third edition)[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2006

The Modified Conjugate Gradient Method for the Least Squares Bisymmetric Solution of the General Linear Matrix Equation

TIAN Xiao-hong, ZHANG Kai-yuan

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: In this paper, an iterative method is proposed to find the least squares bisymmetric solutions of the general linear matrix equation. This method is obtained through a special transformation and the approximate disposal on the base of conjugate gradient method for solving linear algebraic equations. The convergence of this method is also given. By using this method, a least squares bisymmetric solution can be obtained within the finite iterative steps in the absence of round-off errors, and the solution with least norm can be obtained by choosing a special initial bisymmetric matrix. In addition, its optimal approximation solution to a given matrix can be obtained. Numerical examples show that the iterative method is efficient.

Keywords: bisymmetric matrix; least squares solution; least-norm solution; iterative method; optimal approximation